

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ

---

УДК 519.63  
ББК 22.193

**А.В. БОРОВСКИЙ**  
доктор физико-математических наук, профессор  
Байкальского государственного университета экономики и права,  
г. Иркутск  
e-mail: andrei-borovskii@mail.ru

## УСОВЕРШЕНСТВОВАННЫЙ МЕТОД РАЗНОСТНОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Рассмотрен разностный метод Бахвалова–Жилейкина, разработанный для решения уравнений в частных производных параболического типа. Дан обзор возможных решений пространственно-временных уравнений в частных производных параболического типа с некоторыми видами нелинейностей.

*Ключевые слова:* дифференциальные уравнения в частных производных, численные методы, нелинейные системы.

---

**A. V. BOROVSKY**  
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,  
Baikal State University of Economics and Law, Irkutsk  
e-mail: andrei-borovskii@mail.ru

## IMPROVED METHOD OF DIFFERENT SOLUTION OF PARTIAL EQUATIONS OF PARABOLIC TYPE FOR STUDYING NONLINEAR SYSTEMS

The author studies Bakhvalov-Zhileikin method for different solution of partial equations of parabolic type. The article presents the review of possible solutions of space-time partial equations of parabolic type with some kinds of nonlinearity.

*Keywords:* partial differential equations, numerical techniques, nonlinear systems.

---

Во многих технических, физических и экономических приложениях возникает необходимость исследовать распространение волнового импульса в нелинейной среде. Основным уравнением, математически описывающим данный процесс, является нелинейное волновое уравнение (НВУ), вытекающее в физике из уравнений Максвелла. Нелинейность в этом уравнении обусловлена свойствами среды.

В том случае, если амплитуда волны меняется медленно на расстояниях порядка длины волны  $|\partial_z A|, c^{-1}|\partial_t A| \ll k|A|$ , то возмож-

ны упрощения волнового оператора, и НВУ сводится к параболическому уравнению [1]. В данной работе рассмотрим следующий вид параболического уравнения:

$$\frac{1}{v_g} \partial_\tau A + \frac{i}{2k} (\Delta_\perp + \hat{\Phi}(|A|^2))A = 0; \quad (1)$$

$$\hat{\Phi}(|A|^2) = k_p^2 \left[ 1 - \frac{(1 + k_p^{-2}(\Delta_\perp \gamma))}{\gamma} \right]; \quad (2)$$

$$\gamma = (1 + |A|^2)^{1/2},$$

где  $A(r, z, t)$  — комплексная амплитуда распространяющейся волны;  $i$  — комплексная единица;  $v_g$  — групповая скорость;  $k$  — волновое число,  $k_p$  — константа среды;  $\Delta_{\perp} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right)$  — поперечный лапласиан;  $\hat{\Phi}(|A|^2)$  — математический оператор алгебраического, дифференциального или смешанного вида, описывающий нелинейность среды [2].

Комплексное параболическое уравнение с мнимой единицей при поперечном лапласиане часто называют нелинейным уравнением Шредингера (НУШ), поскольку оно походит на уравнение Шредингера в квантовой механике. В данном случае уравнение (1) не имеет отношения к квантовой механике и описывает распространение волнового импульса в нелинейной среде.

Уравнения (1)–(2) записаны в сопутствующих переменных  $\xi = v_g t - z$ ;  $\tau = t$ . В параболическом уравнении (1) переменная  $\xi$  является параметром задачи. От нее зависят начальные и граничные условия

$$\begin{aligned} A(r, \xi, \tau = 0) &= A_0(r, \xi); \\ A(r = \infty, \xi, \tau) &= 0; \\ \partial_r A(r = 0, \xi, \tau) &= 0. \end{aligned}$$

Удобно обезразмерить переменные, входящие в выражения (1)–(2), согласно следующим соотношениям:

$$r_1 = \frac{r}{r_0}; \quad \zeta = \frac{v_g \tau}{2kr_0^2};$$

$$\begin{aligned} a(r_1, \xi, \zeta) &= A_0^{-1} A(r_1, \xi, \zeta); \\ A_0 &= \max |A(r_1, \xi, \zeta = 0)|. \end{aligned}$$

В результате получим следующую математическую задачу, где индекс «1» опущен для краткости:

$$\frac{\partial a}{\partial \zeta} + i\Delta_{\perp} a + iF(|a|^2)a = 0; \quad \zeta > 0; \quad (3)$$

$$\begin{aligned} a(r, \xi, \zeta = 0) &= a_0(r, \xi); \\ a(r = \infty, \xi, \zeta) &= 0; \\ \partial_r a(r = 0, \xi, \zeta) &= 0. \end{aligned}$$

Выражение для нелинейности (2) позволяет рассмотреть иерархию моделей нелинейной среды [6]:

1. Среда с квадратичной нелинейностью

$$F(|a|^2) = \frac{b_1 b_2}{2} |a|^2. \quad (4)$$

2. Среда с насыщением квадратичной нелинейности

$$F(|a|^2) = b_1 [1 - (1 + b_2 |a|^2)^{-1/2}]. \quad (5)$$

3. Среда с насыщением квадратичной нелинейности и стрикцией, т.е. выталкиванием из области, занятой сильной волной:

$$\begin{aligned} F(|a|^2) &= b_1 [1 - (1 + b_2 |a|^2)^{-1/2} \times \\ &\times \max\{0, 1 + b_1^{-1} \Delta_{\perp} (1 + b_2 |a|^2)^{1/2}\}]. \end{aligned} \quad (6)$$

Величины  $b_1, b_2$  составляют «параметрический комплекс» задачи (3):

$$b_1 = (r_0 k_p)^2; \quad b_2 = \frac{|a_0|^2}{|a_n|^2}.$$

Параметр  $b_1$  равен квадрату отношения поперечного размера исходного волнового импульса к длине волны, а  $b_2$  — отношению начальной интенсивности волнового импульса к интенсивности насыщения нелинейности среды.

Начальная форма импульса выбирается в виде протяженного веретена.

Для решения параболического уравнения (3) Н.С. Бахваловым и Я.М. Жилейкиным предложен численный метод, основы которого заложены в [9], а наиболее продвинутая реализация представлена в работе [6].

Задача (3) решается в области  $\Sigma (0 \leq r \leq R, 0 \leq \zeta \leq L)$ . На границе области ставятся условия  $a(r, \xi, \zeta = 0) = a_0(r, \xi)$ ;  $a(r = R, \xi, \zeta) = 0$ ;  $\partial_r a(r = 0, \xi, \zeta) = 0$ . В области  $\Sigma$  вводится сетка  $\bar{\omega}(r_n, \zeta_m)$ ;  $n = 1, 2, \dots, N$ ;  $m = 0, 1, \dots, M$  с шагами  $h_r = R / (N - 1)$ ;  $h_{\zeta} = L / M$ . В узлах сетки рассматривается следующая разностная схема:

$$\frac{a_n^{m+1} - a_n^{m-1}}{2h_{\zeta}} + i \left( \frac{\Lambda a_n^{m+1} + \Lambda a_n^{m-1}}{2} \right) +$$

$$+ iF(|a_n^m|^2, \Lambda |a_n^m|^2, \Delta |a_n^m|^2) a_n^m = 0;$$

$$n = 1, \dots, N - 1; m = 1, \dots, M - 1;$$

$$a_n^0 = a_0(r_n, \xi); n = 1, \dots, N;$$

$$a_N^m = 0; m = 0, 1, \dots, M.$$

Значения  $a_n^1$  определяются согласно следующим уравнениям:

$$\frac{a_n^1 - a_n^0}{h_{\zeta}} + i \left( \frac{\Lambda a_n^1 + \Lambda a_n^0}{2} \right) +$$

$$+ iF(|a_n^{1/2}|^2, \Lambda |a_n^{1/2}|^2, \Delta |a_n^{1/2}|^2) a_n^{1/2} = 0;$$

$$\frac{a_n^{1/2} - a_n^0}{h_c/2} + i\Lambda a_n^0 + iF(|a_n^0|^2, \Lambda |a_n^0|^2, \Delta |a_n^0|^2)a_n^0 = 0;$$

$$a_n^{1/2} = 0.$$

Дискретные операторы  $\Lambda$  и  $\Delta$  имеют следующий вид:

$$\Lambda a_n^m = \begin{cases} \frac{(r_n + h_r/2)a_{n+1}^m - 2r_n a_n^m + (r_n - h_r/2)a_{n-1}^m}{r_n h_r^2}, & 1 < n < N; \\ \frac{4(a_2^m - a_1^m)}{h_r^2}, & n=1. \end{cases}$$

$$\Delta a_n^m = \begin{cases} \frac{(a_{n+1}^m - a_{n-1}^m)}{h_r}, & 1 < n < N; \\ 0, & n=1. \end{cases}$$

Представленная разностная схема является трехслойной. Нулевой слой определяется начальными условиями. Первый слой находится из специального сеточного уравнения. Дальнейший расчет ведется с привлечением данных с двух предыдущих слоев. Я.М. Жилейкин показал, что точность аппроксимации разностной схемы  $O(h_r^2 + h_c^2)$ . С той же точностью разностная схема удовлетворяет закону сохранения энергии для волнового импульса. Система матричных уравнений решается методом прогонки.

Исследование параболического уравнения привело к открытию широкого спектра новых эффектов. Наиболее полный обзор, включающий до 180 ссылок, можно найти в книге [2]. В работах [3; 4; 8] решалось параболическое уравнение с квадратичной нелинейностью (6) — керровская нелинейность, предсказан эффект самофокусировки волнового пучка. Оказалось, что такой пучок локализуется в фокус, где возникает сингулярность, т.е. интенсивность волны устремляется к бесконечности. Это говорит о неполноте керровской модели нелинейности. Для преодоления сингулярности в модель вводят искусственное поглощение. В этом случае интенсивность волны в фокальной точке становится конечной. Волна, прошедшая через фокус, расходится (дифрагирует). Эффект самофокусировки носит пороговый характер. Впоследствии была доказана многофокусная структура, создаваемая мощным пучком в керровской

среде. Исходный волновой фронт пучка разбивается на конечное число кольцевых зон, в каждой из которых сосредоточена одинаковая мощность волны. Эту мощность называют критической мощностью. Каждая кольцевая зона схлопывается в свой собственный фокус. В результате при самофокусировке мощного пучка возникает своеобразная многофокусная структура.

В квадратичной среде с бездиссипативным насыщением (модель (5)) возникает совершенно иная картина распространения пучка [5]. В процессе самофокусировки пучок как целое захватывается нелинейной средой и распространяется на неограниченное расстояние, периодически расширяясь и схлопываясь (пульсируя). При расширении возникает кольцо интенсивности с провалом в центре на оси пучка, при схлопывании возникает фокус с максимумом интенсивности на оси пучка. Поэтому такой режим распространения волнового пучка авторы [5] назвали «пульсирующим волноводом».

Отличная от перечисленных двух режимов картина распространения волнового пучка возникает в квадратичной среде с насыщением и включением стрикции — выталкивания среды из области, занимаемой сильной волной [11]. Данной модели соответствует нелинейность (6), обладающая набором поперечных собственных мод:

$$a_{s,n}(r, \zeta) = U_n(r, s) \exp \left[ i \frac{k_p^2}{2k} (s-1)\zeta \right],$$

где  $U_n(r, s)$  — действительная функция, зависящая только от радиуса  $r$  и параметра  $s$ ;  $n$  — количество нулей функции  $U_n(r, s)$ .

Функция  $U_n(r, s)$  удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\Delta_{\perp} U_n - \left( \frac{1 + \Delta_{\perp} \gamma}{\gamma} + s \right) U_n = 0,$$

$$\gamma = (1 + |U_n|^2)^{1/2} \tag{7}$$

и краевым условиям

$$\partial_r U_n(r=0, s) = 0; \quad U_n(r=\infty, s) = 0. \tag{8}$$

Поперечные собственные моды возникают при  $0 < s < 1$ . Их существование у параболических уравнений (1)–(2) установлено в работе [11] и подробно рассмотрено в статье [7]. Данное уравнение в краевыми условиями (7)–(8) в математике известны

как задача Штурма–Лиувилля. Уравнения (7) записаны для случая отсутствия кавитации, т.е. полного выталкивания среды из ограниченных областей.

Обобщение на случай наличия кавитации, а также интересный результат для двумерной задачи, описывающей распространение пучков, приводятся в [10]. Установленный эффект назвали эффектом самоканалирования пучка в нелинейной среде (рис.), когда в процессе самофокусировки в среде с нелинейностью (6) поперечное распределение амплитуды стремится к нулевой собственной моде (7)–(8). В работе [10] рассмотрена неустойчивость самоканалирования относительно азимутальных начальных возмущений волнового фронта пучка. При этом решалась трехмерная задача для параболического уравнения. Численный метод для решения такой задачи разработал А.Б. Борисов. Эффект распада пучка на несколько филаментов назвали филаментацией. Было показано, что число филаментов определяется отношением мощности пучка к критической мощности самофокусировки. Филаменты, мощность которых порядка критической, устойчивы к дальнейшему распаду.

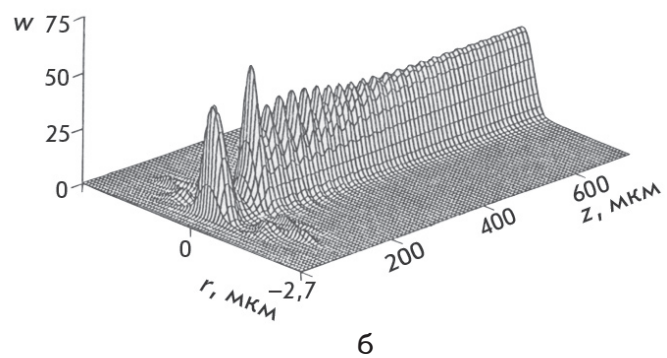
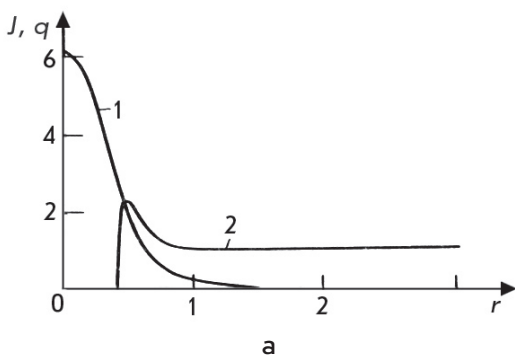
В работе [6] поставлена и решена трехмерная задача о распространении волнового импульса в нелинейной среде. Форма импульса выбиралась в виде веретена. Были обнаружены уникальные эффекты, связанные с распространением трехмерного импульса. К их числу относятся:

- динамическая модуляция импульса в фокальной области. Внутри схлопнувшегося импульса возникает мощный фокус, который затем делится на два пучка, которые разбегаются в противоположных направлениях внутри огибающей импульса. Затем процесс повторяется;

- возникновение мощного одиночного пространственно-двумерного солитона, который распространяется на неограниченные расстояния (при отсутствии диссипации);

- «гигантское» уширение спектра волнового импульса, обусловленное разбиением плавной огибающей импульса на несколько узких пучков.

Таким образом, нелинейное параболическое уравнение является достаточно мощным инструментом для изучения и описания распространения волновых пучков и импульсов в нелинейных средах.



Решение параболического уравнения (1)–(2) методом Бахвалова–Жилейкина:

а — поперечная нулевая собственная мода параболического уравнения в условиях кавитации среды ( $J = |a|$ ,  $q$  — плотность среды); б — асимптотическое схождение исходного пучка к нулевой собственной моде параболического уравнения ( $W = |a|^2$ )

### Список использованной литературы

1. Боровский А.В. Исследование нелинейных систем спектральным методом с использованием разложений Чебышева // Известия Иркутской государственной экономической академии (Байкальский государственный университет экономики и права): электр. науч. журнал. 2012. № 1. URL: <http://eizvestia.isea.ru/reader/article.aspx?id=11641>. (Идентификац. номер статьи в НТЦ «Информрегистр» 0421200101\0045).
2. Боровский А.В., Галкин А.Л. Лазерная физика. М., 1996.
3. Дышко А.Л., Луговой В.Н., Прохоров А.М. Самофокусировка интенсивных световых пучков // Письма в ЖЭТФ. 1967. Т. 6. С. 655.
4. Луговой В.Н., Прохоров А.М. Теория распространения мощного лазерного излучения в нелинейной среде // УФН. 1973. Т. 111. С. 203.

5. Нелинейная динамика в материальной среде субпикосекундного лазерного импульса при релятивистских интенсивностях светового поля / Борисов А.Б., Боровский А.В., Коробкин В.В. и др. // Известия АН СССР. Сер. Физика. 1991. Т. 55. С. 1245.
6. Нелинейное распространение ультракоротких мощных лазерных импульсов в веществе / А.В. Боровский, А.Л. Галкин [и др.]. М., 1995.
7. Релятивистско-стрикционное самоканалирование интенсивных ультракоротких лазерных импульсов в веществе / А.Б. Борисов, В.В. Коробкин, А.В. Боровский и др. // ЖЭТФ. 1992. Т. 101. С. 1132.
8. Таланов В.И. О самофокусировке волновых пучков в нелинейных средах // Письма в ЖЭТФ. 1965. Т. 2. С. 218.
9. Численный анализ на фортране. Стандартные программы решения задач волновой физики. М., 1979.
10. Borisov A.B., Borovsky A.V., Shiryev O.B. et al. Relativistic and charge-displacement self-channeling of intense ultrashort laser pulses in plasmas // Phys. Rev. A. 1992. Vol. 45. P. 5830.
11. Sun G.Z., Ott E., Lee Y.C., Guzdar P. Self-focusing of short intense pulses in plasmas // Phys.Fluids. 1987. Vol. 30. P. 526.

### Referenses

1. Borovsky A.V. Issledovanie nelineinykh sistem spektral'nym metodom s ispol'zovaniem razlozhenii Chebysheva // Izvestiya Irkutskoi gosudarstvennoi ekonomicheskoi akademii (Baikal'skii gosudarstvennyi universitet ekonomiki i prava): elektr. nauch. zhurnal. 2012. 1. URL: <http://eizvestia.isea.ru/reader/article.aspx?id=11641>. (Identifikats. nomer stat'i v NTTs «Informregistr» 0421200101\0045).
2. Borovsky A.V., Galkin A.L. Lazernaya fizika. М., 1996.
3. Dyshko A.L., Lugovoi V.N., Prokhorov A.M. Samofokusirovka intensivnykh svetovykh puchkov // Pis'ma v ZhETF. 1967. Т. 6. S. 655.
4. Lugovoi V.N., Prokhorov A.M. Teoriya rasprostraneniya moshchnogo lazernogo izlucheniya v nelineinoi srede // UFN. 1973. Т. 111. S. 203.
5. Nelineinaya dinamika v material'noi srede subpikosekundnogo lazernogo impul'sa pri relyativistskikh intensivnostyakh svetovogo polya / Borisov A.B., Borovskii A.V., Korobkin V.V. i dr. // Izvestiya AN SSSR. Ser. Fizika. 1991. Т. 55. S. 1245.
6. Nelineinoe rasprostranenie ul'trakorotkikh moshchnykh lazernykh impul'sov v veshchestve / A.V. Borovskii, A.L. Galkin [i dr.]. М., 1995.
7. Relyativistsko-striksionnoe samokanalirovanie intensivnykh ul'trakorotkikh lazernykh impul'sov v veshchestve / A.B. Borisov, V.V. Korobkin, A.V. Borovskii i dr. // ZhETF. 1992. Т. 101. S. 1132.
8. Talanov V.I. O samofokusirovke volnovykh puchkov v nelineinykh sredakh // Pis'ma v ZhETF. 1965. Т. 2. S. 218.
9. Chislennyi analiz na fortrane. Standartnye programmy resheniya zadach volnovo fiziki. М., 1979.
10. Borisov A.B., Borovsky A.V., Shiryev O.B. et al. Relativistic and charge-displacement self-channeling of intense ultrashort laser pulses in plasmas // Phys. Rev. A. 1992. Vol. 45. P. 5830.
11. Sun G.Z., Ott E., Lee Y.C., Guzdar P. Self-focusing of short intense pulses in plasmas // Phys.Fluids. 1987. Vol. 30. P. 526.